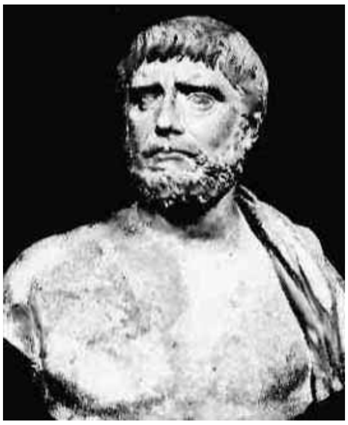
Semejanza y trigonometría

1. LECTURA COMPRENSIVA



En este tema podríamos proponer un trabajo biográfico sobre Tales de Mileto (624 aC-547 aC) con el siguiente esquema:

Apuntes biográficos:

1. Detalles históricos y geográficos.
2. Aportación a las matemáticas.
3. Otras aportaciones.

Una página web interesante es la siguiente:

http://www.astroseti.org/imprime.php?num=3568

En el anexo final se incluye el trabajo.

También:

www.ebiografias.com

2. LO QUE VAMOS A ENSEÑAR

EN BUSCA DEL CONOCIMIENTO. SABER PARA CONOCER

Trabajando el conocimiento

Para el desarrollo de las clases podemos utilizar el siguiente guión:

1. Geometría

Etimología. Historia.

Parte de la matemática que estudia: 1. El espacio. 2. Sus objetos. 3. Sus transformaciones.

Longitudes y ángulos. Las dos magnitudes fundamentales.

Longitud. Unidad el metro. Sistema métrico decimal.

Ángulo. Separación entre dos semirrectas con vértice común. Unidad: el grado. Sistema sexagesimal. Vemos ángulos, por eso las cosas cuando están más lejos nos aparecen más pequeñas. La profundidad la captamos por tener dos ojos. Hacer coincidir dos bolígrafos con un ojo guiñado.

2. Semejanza de figuras

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma.

1. Sus ángulos correspondientes son iguales.
2. Sus lados son proporcionales.

Mapas, fotografía, fotocopia, escuadras y cartabones, televisiones,…

¿Cómo conseguir figuras semejantes?

Trazando paralelas sobre una radiación de la figura.

3. Tres teoremas fundamentales de la Geometría

Teorema de Tales

[El triángulo es indeformable (verlo con mecano)]

◦ Dos triángulos que tengan sus ángulos iguales también tienen sus lados proporcionales. Es decir, son semejantes.

Teorema de Pitágoras

Ternas pitagóricas. Triángulos acutángulos y obtusángulos.

La suma de los ángulos de un triángulo es de 180º

4. Razones trigonométricas

Son las razones de proporcionalidad entre los lados de un triángulo rectángulo.

Establecen relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo.

Definición. Calculadora: manejo de ángulos y funciones inversas.

Ejemplo.- Hallar todas las razones trigonométricas del ángulo agudo de un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5

5. Resolución de triángulos

Aplicación de la trigonometría a los problemas prácticos.

Ej 1. Una carretera de 30º de inclinación. Recorremos 240m. ¿Cuánto habremos subido de altura?

Ej 2. Tenemos que hacer una rampa para salvar una altura de 80cm. El ángulo máximo permitido es de 10º. ¿A qué distancia tenemos que empezar la rampa?

Ej 3. En una casa de 15m de larga queremos construir un tejado con una inclinación de 45º. ¿Cuál será la longitud del tejado?

6. Cálculo de la altura de objetos de base inaccesible.

Planteando un sistema de ecuaciones con las tangentes.

Una actividad interesante para este tema sería proyectar el vídeo titulado 'Movimientos en el plano' de la colección *Más por menos.*

No es difícil encontrarlo en youtube.

También en el archivo de programas de rtve. En concreto en esta dirección:

http://www.rtve.es/FRONT_PROGRAMAS?go=111b735a516af85ca6718fb8e6a6ee87ea19e3b85f7078618e9d2df450769866cffe9874cbf3ab02678c1bcf4f442dd32fa8bee3f1be2076e790f4543c06508364117464580c5569

Se puede proponer también que un par de alumnos por tema expongan en tres minutos ante sus compañeros los temas siguientes:

1. La biografía del tema.
2. Una síntesis de la proyección con coloquio.

En esta parte se pueden ir dando apuntes sobre cómo hablar en público destacando cada día un aspecto.

Ejercicios prácticos para asentar el concepto

Sería suficiente seleccionar algunos de los que vienen en cualquier libro de texto.

Trabajo sobre la biografía de un matemático según se indica más arriba.

COMPETENCIAS BÁSICAS DE LA PROPIA ASIGNATURA. SABER PARA APLICAR

(Aplicabilidad personal, familiar, social, cultural,…)

- Utilización del vocabulario adecuado para interpretar y transmitir informaciones sobre elementos geométricos.
- Expresión de las medidas efectuadas en las unidades y con la precisión adecuada a la situación y al instrumento utilizado.
- Utilización diestra de los instrumentos de dibujo habituales.
- Descripción verbal de problemas de polígonos semejantes y del proceso seguido en su resolución, confrontándolo con otros posibles.
- Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en polígonos semejantes.

- Identificación de problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
- Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en figuras y de la solución de problemas geométricos en general.
- Utilización de métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de las figuras planas.
- Determinación de longitudes, áreas y volúmenes utilizando el concepto de razón de semejanza, y los teoremas de Tales y de Pitágoras.
- Utilización de los teoremas de Pitágoras, y de las razones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos.
- Determinación de las razones trigonométricas de un ángulo usando la calculadora.
- Determinación de las razones trigonométricas de un ángulo conocida una de ellas.
- Utilización de la calculadora para la realización de cálculos numéricos, y del ordenador para cálculos.
- Utilización del método de la doble observación para resolver triángulos rectángulos.

COMPETENCIAS BÁSICAS COMO EJERCICIO TRANSVERSAL DENTRO DE LA UNIDAD

1. Competencia en comunicación lingüística

A través de los trabajos sobre la biografía de un matemático y la redacción sobre la observación astronómica que se expone más arriba.

Interpretación de problemas geométricos y descripción de los mismos.

Por medio de la exposición oral en el aula del trabajo sobre la biografía y la del vídeo.

2. Competencia matemática

Ya viene desarrollada más arriba.

3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

Son numerosas las relaciones de este tema con el mundo físico: las magnitudes geométricas (longitudes y ángulos), la semejanza (planos, mapas, dibujo), los problemas de mediciones terrestres (topografía).

En el vídeo se presentan numerosas relaciones entre la geometría y el mundo natural y de la ingeniería.

4. Tratamiento de la información y competencia digital

La lectura del libro de texto, la consulta de internet en la página reseñada más arriba, el visionado del vídeo suponen un tratamiento de la información por las actividades que se proponen.

La utilización de internet para recabar información.

El uso de la calculadora científica que en este tema tiene gran incidencia.

5. Competencia social y ciudadana

Esto lo cultivaremos por los momentos de trabajo en clase. Trabajo en equipo con su compañero, exposición de preguntas o sugerencias,… Los debates después del visionado.

6. Competencia cultural y artística

La biografía del matemático que se trabaja es una ventana a una época y a un lugar histórico.

En el vídeo aparecen numerosas alusiones históricas, culturales y artísticas.

7. Competencia para aprender a aprender

La utilización de la calculadora científica requiere una buena dosis de autoaprendizaje. También la utilización del libro de texto para resolver dudas y la consulta en internet.

Los problemas de esta parte también tienen un alto grado de creatividad y de ensayo de propias conjeturas.

8. Autonomía e iniciativa personal

Sobre todo en la elaboración de los trabajos que tienen su parte abierta y facilitan la investigación personal así como la exposición de la propia percepción de las cosas.

3. EVALUACIÓN

EVALUACIÓN COMÚN DEL SABER PARA CONOCER

La realización de un ejercicio sobre los conocimientos parece el núcleo de nuestra evaluación.

Parece que este apartado no ofrece mayor problema. Tendríamos que seleccionar ejercicios teóricos y prácticos de cada uno de los apartados del guión previsto. Podríamos evaluar los siguientes conocimientos:

1. Utiliza los conceptos, procedimientos y terminología de la semejanza y de la trigonometría con propiedad.

2. Calcula longitudes, áreas y volúmenes aplicando el teorema de Thales y el concepto de razón de semejanza y los criterios de semejanza de triángulos.

3. Resuelve cualquier triángulo rectángulo del que se conocen ciertos elementos.

4. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo en un triángulo rectángulo.

5. Resuelve problemas geométricos utilizando los teoremas de Thales, Pitágoras y la trigonometría.
6. Resuelve problemas en los que se aplica la resolución de triángulos rectángulos de medidas de distancias no accesibles, cálculo de áreas y cálculo de volúmenes.

EVALUACIÓN DE LAS COMPETENCIAS BÁSICAS DE SABER PARA APLICAR

La selección de algunos problemas que estén relacionados con los contenidos anteriores.

NOTA.-

Algunas ideas están tomadas del material para el profesor de la editorial BRUÑO.

ANEXO.-

TALES DE MILETO.

Biografía de Tales de Mileto

Nació: alrededor del 624 a.C. en Mileto, Asia Menor (hoy Turquía)

Murió: alrededor del 547 a.C. en Mileto, Asia Menor (hoy Turquía)

Tales de Mileto fue hijo de Examio y Cleobulina. Algunos dicen que sus padres también eran de Mileto pero otros reportan que eran fenicios. J Longrigg escribe en [1]:

Pero la opinión de la mayoría lo consideraba como un verdadero Milesio de origen y de una familia distinguida.

Parece que Tales fue el primer filósofo griego conocido, científico y matemático, aunque su trabajo era el de un ingeniero. Se cree que fue el profesor de Anaximandro (611 a.C. - 545 a.C.) y fue el primer filósofo natural de la Escuela Milesiana. Sin embargo, ninguno de sus escritos le sobrevive por lo que es difícil determinar sus puntos de vista o llegar a estar en lo cierto respecto de sus descubrimientos matemáticos. De hecho no está claro si Tales escribió algunos trabajos y si lo hizo se perdieron durante la época de Aristóteles quien no tuvo acceso a ninguno de ellos. Por otro lado se considera que escribió un libro sobre navegación pero esta suposición tiene poca evidencia en donde basarse. En ese libro de navegación se sugiere que utilizó la constelación de la Osa Menor, la cual definió, como una característica importante en sus técnicas de navegación. Aún si este libro fuese ficticio, es muy probable que Tales de hecho, haya definido a la constelación de la Osa Menor. Proclo, el ultimo de los grandes filósofos griegos, quien vivió alrededor del 450 d.C., escribió:

[Tales] fue primero a Egipto y después introdujo este estudio [geometría] en Grecia. Descubrió muchas propuestas por sí mismo e instruyó a sus sucesores en los principios subrayando muchos otros. Su método de enfrentar los problemas era en muchos casos con grandes generalidades y en algunos otros se basaban más en la naturaleza de la simple inspección y observación.

Existe una dificultad al escribir acerca de Tales y de otros de un período similar. Aunque existen numerosas referencias de Tales que nos permitirían reconstruir un gran número de detalles, las fuentes deben ser consideradas con mucho cuidado ya que era una costumbre muy de la época el dar crédito a hombres famosos con descubrimientos que nunca hicieron. Parte de esto fue como resultado del rango legendario que habían alcanzado hombres como Tales y parte fue el resultado de científicos con muy poco reconocimiento sobre sus estudios tratando de aumentar la posición de sus temas mediante el hecho de ofrecer antecedentes históricos.

Ciertamente que Tales fue una figura con un enorme prestigio, siendo el único filósofo antes de Sócrates en encontrarse entre los Siete Sabios. Plutarco, al escribir sobre estos Siete Sabios, nos dice que (ver [8]):

[Tales] fue el único, aparentemente, de éstos cuya sabiduría, en especulación, fue más allá de los límites de utilidad práctica, el resto adquirió la reputación de sabiduría en política.

Este comentario de Plutarco no debe de entenderse como que Tales no funcionó como político. De hecho lo hizo. Él persuadió a los estados separados de Jonia a formar una

federación con la capital en Teos. Disuadió a sus compatriotas para que no aceptaran una alianza con Creso y, como resultado, salvó a la ciudad.

Se reporta que Tales predijo un eclipse de Sol en el 585 a.C. El ciclo de casi 19 años para los eclipses de la Luna era bien conocido en ese tiempo pero el ciclo para los eclipses de Sol era más difícil de detectar ya que los eclipses eran visibles en diferentes partes de la Tierra. La predicción de Tales respecto al eclipse del 585 a.C. fue probablemente una conjetura basada en el conocimiento de que podría existir un eclipse alrededor de esa época. Las afirmaciones de que Tales utilizó los saros babilónicos, un ciclo de duración de 18 años 10 días y 8 horas, para predecir el eclipse se han demostrado por parte de Neugebauer de ser muy poco probable ya que Neugebauer muestra en [11] que los saros fueron un invento de Halley. Neugebauer escribió [11]:

... no existe un ciclo para eclipses solares visibles en un lugar específico: todos los ciclos modernos conciernen a la Tierra como un todo. No existía una teoría Babilónica para predecir un eclipse solar en 600 a.C., como podemos ver en la situación poco satisfactoria 400 años después, ni tampoco desarrollaron jamás, los Babilonios, ninguna teoría que tuviese en cuenta la influencia de la latitud geográfica.

Después del eclipse del 28 de mayo del 585 a.C. Herodoto escribió:

... el día se cambió de repente en noche. Este evento había sido pronosticado por Tales, el Milesiano, quien previno a los jonios al respecto, fijando para ello el mismo año en que ocurrió. Los medas y los lidios, cuando observaron este cambio, cesaron de luchar y ambas partes se mostraron ansiosas por obtener un tratado de paz.

Longrigg en [1] hasta duda que Tales pronosticase el eclipse por suposición, escribiendo:

... una explicación más plausible parece ser simplemente que Tales resultó ser el erudito que estaba por allí en aquella época en el momento en que este fenómeno astronómico tuvo lugar y la suposición fue que como erudito él fue capaz de predecirlo.

Hay varios relatos de cómo Tales midió la altura de las pirámides. Diógenes Laercio escribiendo en el siglo II d.C. cita a Jerónimo, un alumno de Aristóteles [6] (o vea [8]):

Jerónimo dice que [Tales] hasta tuvo éxito en medir las pirámides mediante la observación de la longitud de su sombra, en el momento en que nuestra sombra es igual a nuestra altura.

Esto parece no contener ningún conocimiento sutil de geometría, simplemente una observación empírica de que en el instante cuando la sombra de un objeto coincide con su altura, entonces lo mismo debe ser cierto para todos los demás objetos. Una declaración similar la hace Plinio (ver [8]):

Tales descubrió cómo obtener la altura de las pirámides y de todos los otros objetos similares, simplemente haciendo la medición de la sombra del objeto en el momento cuando un cuerpo y su sombra son iguales en longitud.

Sin embargo Plutarco cuenta la historia de una manera, que si es acertada, significaría que Tales se estaba acercando a la idea de triángulos similares:

... sin problemas o la ayuda de cualquier instrumento [él] solamente colocó un palo en la extremidad de la sombra producida por la pirámide y habiendo realizado dos triángulos con la luz de los rayos solares, … mostró que la pirámide guarda respecto del palo la misma proporción que muestra la sombra [de la pirámide] respecto de la sombra [del palo]

Por supuesto que Tales podría haber utilizado estos métodos geométricos para resolver problemas prácticos, habiendo simplemente observado las propiedades y sin tener una valoración de lo que significa comprobar un teorema geométrico. Esto concuerda con los puntos de vista de Rusell, quien escribe respecto de las contribuciones de Tales a las matemáticas en [12]:

Se dice que Tales viajó por Egipto y que por lo tanto llevó la ciencia de la geometría a los Griegos. Lo que los Egipcios conocían de geometría eran simplemente reglas empíricas y no existe razón para creer que Tales llegó a pruebas de deducción, como las que más adelante descubrieron los Griegos.

Por otra parte B L van der Waerden [16] afirma que Tales colocó a la geometría en el camino correcto y que estaba en pleno conocimiento de la noción de demostrar un teorema geométrico. Sin embargo, aunque existe mucha evidencia para sugerir que Tales realizó algunas contribuciones fundamentales a la geometría, es fácil interpretar sus contribuciones a la luz de nuestro propio conocimiento, de ahí que creamos que Tales tenía una valoración más completa de la geometría de la que posiblemente pudo haber adquirido. En muchos libros de texto sobre la historia de las matemáticas, se le acreditan a Tales cinco teoremas de geometría elemental:

Un círculo es bisecado por cualquier diámetro.

Los ángulos de las bases de un triángulo isósceles son iguales.

Los ángulos entre dos líneas rectas que se cortan son iguales.

Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y un lado iguales.

Un ángulo en un semicírculo es un ángulo recto.

¿Cuál es la base para estas afirmaciones? Proclo, escribiendo alrededor del 450 d.C., es la base para las primeras cuatro, en el tercero y cuarto casos haciéndose de lo escrito en la Historia de la Geometría de Eudemo de Rodas, quien era un alumno de Aristóteles y su fuente. La Historia de la Geometría de Eudemo está actualmente perdida pero no existe razón para no creer a Proclo. El quinto teorema se cree que sea de Tales, por un pasaje del libro de Diógenes Laercio Vidas de filósofos eminentes escrito en el siglo II d.C.[6]:

Pánfilo dice que Tales, quien aprendió geometría de los egipcios, fue el primero en representar un triángulo que debe tener ángulos rectos, sobre un círculo y que sacrificó un

buey (por el hecho de su descubrimiento). Otros, sin embargo, incluido Apolodoro el calculador, dicen que fue Pitágoras.

Sin embargo un examen más profundo de las fuentes, muestra que, aún si son ciertas, podrían estársele acreditando a Tales demasiadas cosas. Por ejemplo Proclo, utiliza una palabra que significa algo más cercano a 'similar' que a 'igual'- en describirlo (ii). Es muy posible que Tales ni siquiera tuviera manera alguna de medir los ángulos de modo que 'ángulos iguales' no habría sido un concepto que él hubiera podido entender con precisión. Puede haber afirmado poco más que 'Los ángulos de la base de un triángulo isósceles parecen similares'. El teorema (iv) fue atribuido a Tales por Eudemo por menos de razones totalmente convincentes. Proclo escribe (ver [8]):

[Eudemo] dice que el método por el cual Tales mostró cómo encontrar las distancias de barcos a la orilla, necesariamente involucra el uso de este teorema.

Heath en [8] da tres métodos diferentes que puede haber utilizado Tales para calcular la distancia hasta un barco en el mar. El método que él piensa que es el más probable que utilizase Tales fue tener un instrumento consistente en dos palos clavados en cruz de modo que pudiesen girar sobre el clavo. Un observador iba entonces a lo alto de la torre, colocaba un palo verticalmente (digamos que utilizando una plomada) y después girar el segundo palo sobre el clavo hasta que apuntase al barco. Entonces el observador gira el instrumento, manteniéndolo fijo y vertical, hasta que el palo móvil apunta a un punto apropiado en tierra. La distancia de este punto desde la base de la torre es igual a la distancia hasta el barco.

Aunque el teorema (iv) está por debajo de esta aplicación, habría sido muy posible para Tales concebir semejante método sin apreciar nada de los 'triángulos congruentes'.

Como un comentario final sobre estos cinco teoremas; existen relatos conflictivos respecto del teorema (iv) como el propio Diógenes Laercio sabe. Aún el propio Pánfilo no puede ser tomado como una autoridad ya que vivió en el siglo primero d.C., mucho después de la época de Tales. Otros han atribuido la historia relacionada con el sacrificio de un buey a Pitágoras al descubrir Pitágoras su teorema. Ciertamente que existe mucha confusión y muy poca certeza al respecto.

Nuestro conocimiento de la filosofía de Tales se debe a Aristóteles quien escribió en su Metafísica:

Tales de Mileto enseñó que 'todas las cosas son agua'.

Estos, según escribe Brumbaugh [5]:

...puede parecer un comienzo poco prometedor para la ciencia y la filosofía como las conocemos hoy día; pero, contra los antecedentes de la mitología de la cual surgió, era algo revolucionario.

Sambursky escribe en [15]:

Fue Tales el primero en concebir el principio de la explicación de multitud de fenómenos con un pequeño número de hipótesis para todas las diferentes manifestaciones de la materia.

Tales creía que la Tierra flota sobre agua y que todas las cosas llegan a ser a partir del agua. Para él la Tierra era un disco plano flotando en un océano infinito. También se ha reivindicado que Tales explicó los terremotos por el hecho de que la Tierra flota sobre agua. Nuevamente, la importancia de la idea de Tales es que fue el primero que trató de explicar semejantes fenómenos por razonamiento en lugar de darle significados súper-naturales.

Es interesante que Tales tiene ambas historias contadas acerca de sus grandes habilidades prácticas y también diciendo de él que era un gran soñador. Aristóteles, por ejemplo, relata una historia de cómo Tales utilizó sus habilidades para deducir que la próxima estación de la cosecha de aceituna sería muy grande. Basándose en ello compró todas las prensas de aceitunas y después fue capaz de obtener una fortuna cuando la cosecha verdaderamente llegó. Por otro lado Platón cuenta una historia de como una noche se encontraba Tales observando el cielo y caminando se cayó en una zanja. Una sirvienta muy bonita lo ayudó a levantarse y le dijo 'Cómo esperas entender lo que sucede allá arriba si ni siquiera ves lo que tienes a tus pies'. Como dice Brumbaugh, ¡quizá este haya sido el primer chiste de profesores distraídos en occidente!

Traducción de Astroseti

Tomado de http://www.astroseti.org/imprime.php?num=3568